



AS ORIGENS DA REGRA DE L'HÔPITAL

Andrea Machado Fernandes Aquino

Universidade Federal do Cariri, e-mail: andreamachado.lp@gmail.com

Lucas Machado Fernandes

Universidade Federal da Paraíba, e-mail: lucasmachadofernandes2@gmail.com

Ozana da Silva Alencar

Universidade Regional do Cariri, e-mail: ozana.alencar@urca.br

Fernanda dos Santos Rosendo

Universidade Regional do Cariri, e-mail: rsantosenso@gmail.com

RESUMO: Este trabalho faz, a priori, uma breve abordagem histórica, através de pesquisa bibliográfica, sobre a Regra de L'Hôpital, formulada por Johann Bernoulli, utilizada, a princípio, para calcular limites de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e, posteriormente, utilizada para outros casos, trazida, pela primeira vez, no *Analyse des infiniment petits*, primeiro livro de Cálculo existente, publicado pelo marquês de L'Hôpital. Foram ressaltadas as polêmicas envolvidas na autoria das teorias contidas no livro e a importância desses dois matemáticos no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Em seguida, foi feito um comparativo em relação ao modo como foi enunciada a Regra, originalmente, enfatizando a visão geométrica e o uso de diferenciais, e como a mesma vem sendo abordada nos livros contemporâneos e utilizada até os dias atuais. Ao final, dentre outros exemplos, foi resolvido, utilizando o enunciado mais atual da Regra de L'Hôpital, a primeira aplicação trazida pelo marquês em seu livro *Analyse*.

Palavras-chave: Regra de L'Hôpital; Diferenciais; Cálculo Diferencial e Integral; Johann Bernoulli.

1. Introdução

Nos cursos de introdução ao Cálculo Diferencial, a Regra de L'Hôpital aparece como uma importante ferramenta na resolução de limites que geram certos tipos de indeterminações. Com um enunciado simples e didático, o resultado matemático atrai a atenção de vários estudantes pela facilidade nas aplicações.

Entretanto, nem sempre há uma preocupação de entender o significado geométrico envolvido por trás dessa ferramenta. O que não pode ocorrer devido a sua grande relevância para elucidação do conteúdo.

2. Objetivos

Este trabalho tem como objetivo fornecer um breve relato sobre a origem histórica e matemática da Regra de L'Hôpital.

3. Metodologia

Foi utilizado o método de pesquisa bibliográfica que permitiu comparar o enunciado original da Regra de L'Hôpital apresentado no livro *Analyse des infiniment petits*, do marquês de L'Hôpital com o enunciado presente nos livros atuais de Cálculo Diferencial.

4. Resultados

4.1 Origem histórica

Guillaume François Antoine (1661–1704), mais conhecido como Marquês de L'Hôpital, foi um matemático que teve seus talentos reconhecidos desde muito cedo. Ainda adolescente chegou a resolver um problema proposto por Blaise Pascal. Além de ter contribuído para soluções de diversos problemas, entre eles, o problema da braquistócrona, que, na época também havia sido solucionado por gigantes da Matemática como Jakob Bernoulli, Newton e Leibniz. Apesar disso, o marquês tem seu nome lembrado até hoje devido a regra de L'Hôpital, em sua homenagem, presente no seu livro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Análise de quantidades infinitamente pequenas para a compreensão de curvas).

Atualmente, sabe-se que a famosa regra pertence a Johann Bernoulli (1667 – 1748), matemático suíço que pertenceu a uma família de matemáticos bastante renomada. Bernoulli atuou também na Física, Química e Astronomia e teve um importante papel na divulgação do Cálculo Diferencial e Integral pela Europa. Inclusive, foi este o motivo do suíço ter se hospedado por meses na casa do nobre marquês, ganhando uma boa quantia em dinheiro: ensinar o Cálculo de Leibniz e Newton a pedido de L'Hôpital.

4.2 A Regra segundo L'Hôpital e Bernoulli

Segundo Katz (1993), L'Hôpital, em seu livro *Analyse des infiniment petits*, definiu, inicialmente, quantidades variáveis como sendo as que aumentam ou diminuem continuamente. Em seguida, definiu a diferencial df de uma quantidade variável f como sendo a parte infinitamente pequena pela qual f aumenta ou diminui continuamente. L'Hôpital também expôs dois axiomas sobre a aplicação das diferenciais:

1. Uma quantidade que foi aumentada ou diminuída por outra infinitamente pequena pode ser considerada que permanece inalterada.
2. Chama-se curva o conjunto de um número infinito de linhas retas infinitamente pequenas.

A partir disso, L'Hôpital formulou as regras para o cálculo de derivadas. Vejamos, como exemplo disso, a demonstração da derivada do produto chamada por ele como diferença do produto:

Note que pelo *Axioma 1*, se x e y são quantidades variáveis, então podemos escrever:

$$x = dx + x \quad \text{e} \quad y = dy + y$$

Deste modo, sucede-se que

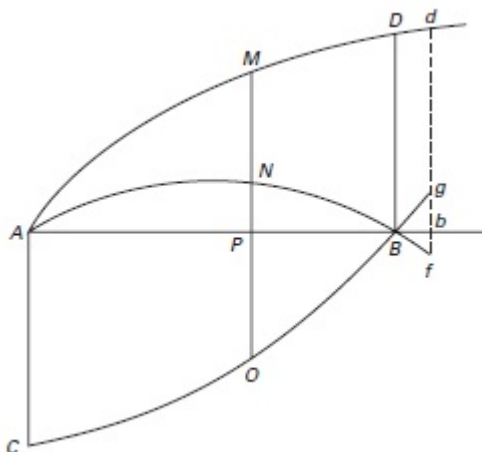
$$\begin{aligned}
 d(xy) &= xy - xy \\
 &= (x + dx)(y + dy) - xy \\
 &= xy + xdy + ydx + dxdy - xy \\
 &= xdy + ydx,
 \end{aligned}$$

já que $dxdy$ pode ser eliminado por ser infinitamente pequeno.

Analogamente, o marquês demonstrou como encontrar “a diferença de uma fração”, conhecida hoje como a regra do quociente para derivadas.

O enunciado da Regra foi feito geometricamente. Veja a seguir:

Considere a curva AMD onde $AP = x$, $PM = y$ e $AB = a$ de maneira que o valor da ordenada y é expressida por uma fração, em que o numerador e o denominador ambos tornam-se 0 quando $x = a$, isto é, quando o ponto P coincide com o ponto B . É necessário encontrar o que será então o valor da ordenada BD .



Suponha, então, $y = p/q$. L'Hôpital percebeu que o valor de y para uma abscissa b infinitamente próxima de B será:

$$y + dy = \frac{p + dp}{q + dq}.$$

Porém, note que, a ordenada $y + dy$ é infinitamente próxima de y , daí, pelo *Axioma 2*, pode-se escrever $y + dy = y$. Note também que p e q são ambos nulos em B . Com isso,

$$y = \frac{dp}{dq}.$$

4.3 A Regra de L'Hôpital nos livros atuais

Segundo Stewart (2014),

Regra de L'Hôpital: Sejam f e g funções sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto, possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir ou for ∞ ou $-\infty$.

Veja a seguir, algumas aplicações da Regra de L'Hôpital:

Exemplo 1. *Considere as funções*

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - 1 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + 4x. \end{array}$$

Uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^3 + 4x = 0$$

segue-se pela Regra de L'Hôpital que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3 + 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x^3 + 4x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{3x^2 + 4} = 0.$$

Exemplo 2. *Sejam as funções*

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \operatorname{sen}(x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sec(x) - 1. \end{array}$$

Note que temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \operatorname{sen}(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sec x - 1 = 0.$$

Nestas condições, a Regra de L'Hôpital fornece

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{sen} x}{\sec x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[2x \operatorname{sen}(x)]'}{[\sec(x) - 1]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(x) + 2x \cos(x)}{tg(x) \sec(x)}.$$

Uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \operatorname{sen}(x) + 2x \cos(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} tg(x) \sec(x) = 0,$$

aplicaremos novamente a Regra de L'Hôpital, obtendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{sen}(x)}{\sec(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(x) + 2x \cos(x)}{tg(x) \sec(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos(x) - 2x \operatorname{sen}(x)}{\sec^3(x) + tg^2(x) \sec(x)} = 4.$$

Exemplo 3. Agora, vamos apresentar o primeiro exemplo trazido pelo livro *Analyse des infiniment petits* publicado por L'Hôpital, a fim de ilustrar a sua regra. Basicamente, iremos calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3 - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}.$$

Vamos responder de acordo com o enunciado atual. Note que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2a^3 - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x} = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} a - \sqrt[4]{ax^3} = 0.$$

Então, aplicando a Regra de L'Hôpital, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3 - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{2a^3 - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x})'}{(a - \sqrt[4]{ax^3})'}.$$

Uma vez que

$$(\sqrt{2a^3 - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x})' = \frac{a^3 - 2x^3}{\sqrt{2a^3 - x^4}} - \frac{a^3}{3\sqrt[3]{a^4x^2}} \quad e \quad (a - \sqrt[4]{ax^3})' = \frac{-3ax^2}{4x^2\sqrt[4]{a^3x}}$$

além de

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^3 - 2x^3}{\sqrt{2a^3 - x^4}} - \frac{a^3}{3\sqrt[3]{a^4x^2}} = 16a \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3ax^2}{4x^2\sqrt[4]{a^3x}} = 9,$$

segue-se que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3 - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = \frac{16a}{9}.$$

5. Considerações Finais

Pôde-se observar que enquanto L'Hôpital e Bernoulli formularam a regra geometricamente, autores contemporâneos de Cálculo Diferencial, como James Stewart, trataram da regra de forma mais algébrica, porém ambos os enunciados são essencialmente iguais.

Nota-se também a enorme relevância do livro *Analyse des infiniment petits* como precursor entre os livros de Cálculo Diferencial, apesar da polêmica que envolveu a autoria das teorias contidas nele.

Referências

- [1] BARBOSA, F. E. **A Regra de L'Hôpital: Análise Histórica da Regra de L'Hôpital.** Campinas, UNICAMP, 2008.
- [2] GILLISPIE, C. C. **Dictionary of Scientific Biography**, Nova York: Scribner's, 1974.
- [3] KATZ, V. **A History of Mathematics: An Introduction.** Nova York: HarperCollins, 1993.
- [4] STEWART, J. **Cálculo.** São Paulo: Cengage Learning, 2014.